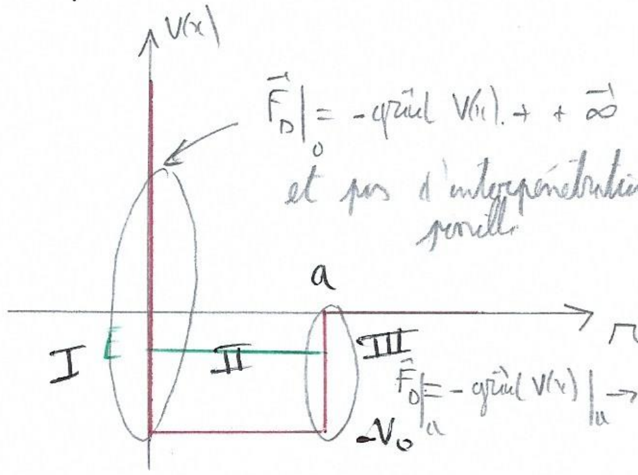
Exercice n°5 : Modélisation d'un deutéron

① Proposition de modélisation :



$\vec{F}_D\big|_0 = -\vec{\text{grad}}\, V(x)\big|_0 \to +\vec{\infty}$ ⇒ effet fortement répulsif sur la particule fictive

et pas d'interpénétration possible

⇒ stabilité du Deutéron

$\vec{F}_D\big|_a = -\vec{\text{grad}}\, V(x)\big|_a \to -\vec{\infty}$ ⇒ effet fortement attractif sur la particule fictive

② $\begin{cases} \varphi_I = 0 & (\text{particule en domaine de potentiel } \infty) \\ \varphi_{II}(x) = A_2 e^{jkx} + B_2 e^{-jkx} \\ \varphi_{III}(x) = A_3 e^{Kx} + B_3 e^{-Kx} \end{cases}$

$k = \sqrt{\dfrac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$

$K = \sqrt{\dfrac{-2mE}{\hbar^2}}$

CL : $\varphi_{II}(0) = 0 \Rightarrow B_2 = -A_2$ donc $\varphi_{II}(x) = A_2\, 2j \sin(kx)$

$\varphi_{III}(x)$ ne peut diverger : $A_3 = 0 \Rightarrow \varphi_{III}(x) = B_3 e^{-Kx}$

Exploitation de la condition de raccordement :

$$\begin{cases} \varphi_{II}(a) = \varphi_{III}(a) \\ \varphi'_{II}(a) = \varphi'_{III}(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2jA_2 \sin(ka) = B_3 e^{-Ka} \\ 2jkA_2 \cos(ka) = B_3(-K) e^{-Ka} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{k \cot(ka) = -K}$$

Soit $k^2 \dfrac{\cos^2 ka}{\sin^2 ka} = K^2 \Leftrightarrow \dfrac{\cancel{2m}(E+V_0)}{\cancel{\hbar^2}} \dfrac{1-\sin^2 ka}{\sin^2 ka} = -\dfrac{\cancel{2m}E}{\cancel{\hbar^2}}$

$\Rightarrow (E+V_0)(1-\sin^2 ka) = -E\sin^2 ka$

$\Rightarrow E + V_0 - V_0 \sin^2 ka = 0 \Rightarrow \sin^2(ka) = \dfrac{E+V_0}{V_0}$ 1/

$$\Rightarrow |\sin ka| = \frac{\sqrt{E+V_0}}{\sqrt{V_0}} = \frac{\sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}}{\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}} = \frac{k}{k_0}$$ en posant $k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$

⚠ on recherche les solutions telles que :

$$\cotg(ka) = -\frac{K}{k} < 0 \quad \text{i.e} \quad tg(ka) < 0$$

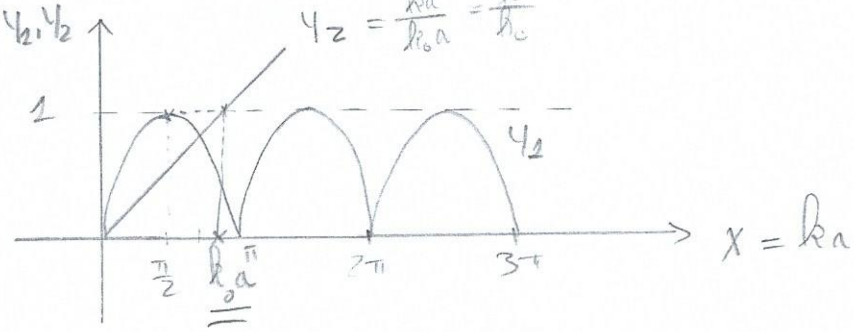
Bilan : équation transcendante à résoudre.

$$\begin{cases} |\sin ka| = \dfrac{k}{k_0} \\ tg(ka) < 0 \end{cases}$$

3) a) On obtient les solutions par intersection des courbes

$Y_1 = |\sin X|$ avec $X = ka$

et $Y_2 = \frac{X}{X_0}$ avec $X_0 = k_0 a$. avec $tg\, ka < 0$



b) Solution unique ? On constate que lorsque $k_0 a \simeq \frac{\pi}{2}$ on assure une seule solution soit lorsque $k \simeq k_0 \Rightarrow \frac{k}{k_0} \simeq 1$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{E_\ell + V_0}{V_0}} \simeq 1 \Rightarrow \text{impose } V_0 \gg E_\ell$$

c) $k \simeq \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \simeq \frac{\pi}{2a} \Rightarrow \boxed{V_0 \simeq \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}}$ A.N. $V_0 \simeq 100\,\text{MeV}$.

on a bien $V_0 \gg |E_\ell|$

d) L'énergie de liaison est donc très proche de 0

$\Rightarrow$ grande facilité pour extraire le neutron du noyau.